-EXERCICE 30.6-

• ENONCE :

« Détermination des coefficients de Cauchy »

• On considère le dispositif des fentes d'Young, supposées infiniment fines : les 2 fentes (F_1) et (F_2) sont distantes de $a = 1\ mm$, l'écran d'observation étant placé à $D = 1\ m$ de ces dernières.

• Dans un premier temps, la source est ponctuelle et monochromatique ($\lambda = 0,589\ \mu m$) ; devant la fente (F_1) la plus haute, on place une lame à faces parallèles non absorbante d'épaisseur $e = 50\ \mu m$ et d'indice $n(\lambda)$ (on admettra que la lame est attaquée sous incidence quasi-normale).

On constate une translation du système d'interférences de $x_1 = 29,8\ mm$.

• Dans un deuxième temps, on conserve la lame mais on remplace la source monochromatique par une source de lumière blanche ; à l'abscisse $x_2 = 32,3\ mm$, on observe une frange « assez » blanche et brillante, dite « **frange achromatique** » : pour cette abscisse, l'éclairement varie peu en fonction de la longueur d'onde.

1) Déterminer les abscisses x_1 et x_2 en fonction de a, D, e, n, λ et $dn/d\lambda$.

2) On suppose que l'indice de la lame obéit à la loi de Cauchy : $n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$; exprimer les coefficients A et B en fonction de a, e, D, λ, x_1 et x_2, puis les calculer.

 Christian MAIRE

• CORRIGE :

« Détermination des coefficients de Cauchy »

1) En l'absence de lame, la différence de marche entre les rayons (2), issu de (F_2), et (1), issu de (F_1), vaut : $\delta'_{2/1}(x) = \dfrac{ax}{D}$.

• L'introduction de la lame rallonge le chemin optique du rayon (1) : le chemin optique associé à la traversée de la lame vaut ne, alors qu'il ne vaut que e pour le rayon (2) ; la différence de marche introduite par la présence de la lame a pour expression : $\delta''_{2/1} = e - ne = -(n-1)e$.

La différence de marche totale vaut donc : $\delta_{2/1}(x) = \dfrac{ax}{D} - (n-1)e$.

• La frange d'ordre 0 s'est donc translatée de la distance : $0 = \dfrac{ax_1}{D} - (n-1)e \Rightarrow \boxed{x_1 = \dfrac{(n-1)eD}{a}}$ (1)

• En lumière blanche, la frange achromatique est caractérisée par un éclairement, donc un ordre d'interférence, **stationnaire** vis-à-vis de la longueur d'onde $\Rightarrow \left.\dfrac{dp}{d\lambda}\right|_{x=x_2} = 0$; il vient alors :

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{ax_2}{\lambda D} - \frac{(n-1)e}{\lambda}\right) = 0 = -\frac{ax_2}{\lambda^2 D} + \frac{(n-1)e}{\lambda^2} - \frac{e}{\lambda} \times \frac{dn}{d\lambda} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2 = \frac{eD}{a}\left(n - 1 - \lambda\frac{dn}{d\lambda}\right)} \quad (2)$$

2) On peut calculer $\dfrac{dn}{d\lambda} = -\dfrac{2B}{\lambda^3}$; en combinant les relations (1) et (2), on obtient :

$$\boxed{B = \frac{a(x_2 - x_1)}{2eD}\lambda^2} \qquad \text{et :} \qquad \boxed{A = 1 + \frac{a}{2eD}(3x_1 - x_2)}$$

Application numérique : $\boxed{A = 1,571}$ $\boxed{B = 8,67.10^{-3}\ (\mu m)^2}$

Rq : on pourrait alors calculer l'ordre d'interférence p_R pour une radiation rouge ($\lambda = 0,75\ \mu m$) et p_V pour le violet ($\lambda = 0,4\ \mu m$), et en déduire les éclairements relatifs correspondants : le calcul montre qu'ici, le rouge prédomine et que la frange achromatique n'est jamais parfaitement blanche et aussi brillante que la frange d'ordre 0 en l'absence de lame.